BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXI. ročník
2024/2025



Pomocný text k 5. sérii

POLYNOMY

autor: *Tonda*



1 Úvod

Asi každý z vás se již někdy v matematice setkal se slovem **polynom**, někdy také mnohočlen. Tento krátký text slouží k rozšíření znalostí těch, kteří toho o polynomech moc nevědí. Avšak nějaká část může být zajímavá i pro ty, kteří si polynomy dávají denně k snídani.

Z historického hlediska je polynom starší než samotný Ježíš Kristus. Polynomy mají krásné vlastnosti, které z nich dělají mnohem zajímavější funkce než ostatní známé funkce. Některé z nich si ukážeme.

2 Základní pojmy

Do přesné definice polynomu nebudu zacházet. Pokud však někdo neví, co polynom je, jedná se o konečný součet členů tvaru

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

kde x se nazývá **proměnná**, a_i se nazývají **koeficienty** polynomu a $n \in \mathbb{N}$ je **stupeň** polynomu. Číslu a_n říkáme vedoucí koeficient, číslu a_0 absolutní člen. Polynom f se nazývá **normovaný**, jestliže jeho vedoucí koeficient je roven 1. Možná vás napadá otázka, odkud bereme koeficienty a_i. Odpověď na ni není úplně jednoduchá. Dá se říct, že jak kdy. Pokud se setkáte s pojmy jako reálný polynom, polynom s reálnými koeficienty a podobnými, znamená to zkrátka jen to, že za koeficienty a_i se skrývají nějaká reálná čísla. Často se setkáte s polynomy s racionálními koeficienty, celočíselnými koeficienty,... Ve skutečnosti dává smysl uvažovat koeficienty z libovolného komutativního okruhu. Pro ty, co nevědí, co to znamená, buďte rádi. Můžeme například uvažovat polynomy, jejichž koeficienty jsou jiné polynomy. Toho vás naštěstí ušetříme.

Definice: **Hodnotu** polynomu f v bodě α definujeme jako součet $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n$. Dále toto budeme zapisovat jako $f(\alpha)$. Řekneme, že α je **kořen** polynomu f, jestliže $f(\alpha) = 0$.

Polynomy umíme různě sčítat, násobit, zkrátka s nimi dělat různé srandy.

1) Polynom f můžeme vynásobit nějakým číslem c a dostat z něj polynom cf. Jak to uděláme? Prostě a jednoduše vynásobíme všechny koeficienty tímto číslem.

2) Polynomy umíme sčítat a odečítat. $f + g$ definujeme tak, že sečteme/odečteme v každé mocnině x koeficienty z f a g. Tedy pokud polynom f je tvaru $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, g tvaru

$\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, potom polynom $f+g$ bude tvaru

$$\sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i.$$

Všimněme si, že součet dvou polynomů nemůže mít vyšší stupeň než vyšší ze stupňů těchto dvou polynomů. Jak by se tam asi ta vyšší mocnina dostala, že jo... . Může ale mít nižší stupeň, například součet polynomů x^3+1 a $-x^3+1$ je polynom 2, který má stupeň 0.

3) Polynomy umíme také násobit. Obecně vypadá vzorec takto:

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k.$$

Co to znamená intuitivně? Roznásobte všechno se vším a všechno to posčítejte.

Jeden z důvodů, proč polynomy tvoří něco hezkého, je, že takto definované operace nám na množině všech polynomů zadávají strukturu komutativního okruhu. Opět, nerešte, co to je, pokud to nevíte.

3 Kořeny

Stejně jako strom a zub, i polynom může mít své kořeny. Připomenu, že se jedná o čísla, v nichž je hodnota polynomů nulová. Z grafického pohledu jde o průsečíky grafu funkce $f(x)$ s osou x. Jeden z dávných problémů a příčina probdělých nocí spousty matematiků v historii je, jak tyto kořeny proboha najít? Jde to vůbec? Na tuto otázku se pokusím částečně odpovědět. Jedna z možností je jednoduchá. Prostě si vybrat náhodně nějaké číslo a zkusit, jestli je to kořen. Asi se ale shodneme, že to není ideální cesta, vzhledem k nekonečnosti možných kořenů. Co je však zajímavé, je následující tvrzení.

Lemma: Nechť racionální číslo $\frac{s}{t}$ je kořenem polynomu $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$. Potom $s|a_0$ a $t|a_n$.

Tohle tvrzení nám dá konečnou množinu zlomků, které mohou být kořenem polynomu. Stačí je tedy po jednom vyzkoušet. Pokud však polynom má pouze iracionální kořeny, jsme znovu bezradní.

Další užitečná věc je, že pokud α je kořenem polynomu f, pak je polynom f dělitelný lineárním polynomem $(x-\alpha)$. Kořen α polynomu f nazveme **r-násobný**, jestliže polynom f je dělitelný polynomem $(x-\alpha)^r$.

Příklad: Polynom $f = x^2 - 4$ má kořeny ± 2, zvládneme ho napsat jako $(x-2)(x+2)$.

Věta 1 (Základní věta algebry)**:** Libovolný polynom s racionálními koeficienty stupně n má v komplexních číslech právě n kořenů, počítáme-li je včetně násobnosti.

Tato věta je extrémně důležitá a zajímavá. Je snad jasné, že kořenů nemůže být více než stupeň polynomu. To bychom dostali součin více než n lineárních činitelů a po roznásobení by byl stupeň vyšší. Má jich tedy vždy méně nebo rovno. Například v reálných

číslech polynom x^2+1 nemá žádný kořen, neboť x^2 je vždy nezáporné a po přičtení jedničky nemůžeme dostat nulu. Ale komplexní kořeny má $\pm i$, tedy 2, stejně jako jeho stupeň. Tato věta nám zaručuje, že každý takový polynom bude mít právě n kořenů, zkrátka ty kořeny v $\mathbb{C}$ vždy existují.

Pro ty, kteří vědí, co je to derivace polynomu, je následující definice zbytečná.

Definice: Derivací polynomu $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ máme na mysli polynom $\sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^{i-1}$. Značíme $f'(x)$.

Příklad: Derivace polynomu x^3+2x^2 je polynom $3x^2+4x$.

Věta 2: Je-li α dvojnásobný kořen polynomu f, potom je α kořenem f'.

Důkaz: Pro ty, co znáte lépe derivace, zderivujte si polynom f ve tvaru $(x-\alpha)g$, kde g je podíl f a $(x-\alpha)$.

Zřejmě pak induktivně platí, že trojnásobný kořen je kořenem první i druhé derivace, čtyřnásobný navíc třetí derivace, ...

Toto je nástroj, jak se můžeme pokusit najít dvojnásobné kořeny nějakého polynomu. Víme, že to musí být kořen f, zároveň kořen f', tedy to musí být kořen jejich největšího společného dělitele. Zde tedy stojí za zmínku, že pomocí Eukleidova algoritmu umíme, stejně jako v okruhu celých čísel, najít největší společný dělitel dvou polynomů.

Od teď budu uvažovat všechny polynomy s celočíselnými koeficienty. Hledat ale kořeny polynomu není tak snadné. Asi všichni znáte vzoreček pro kořeny kvadratického polynomu, který říká, že kořeny polynomu ax^2+bx+c jsou $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Tyto kořeny mohou být různé, nebo stejné a reálné, nebo komplexní. Hledat tedy kořeny kvadratického polynomu zvládneme pouhým dosazením do vzorce.

A co pro polynom stupně 3? Opět existuje vzorec, známý jako Cardanův vzorec, který říká, že polynom ax^3+bx^2+cx+d má kořeny

$$x_{1,2,3}=-\frac{b}{3a}+\frac{1}{3a}\Bigg(\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}}\Bigg).$$

Vzorec pro polynom stupně 4 uvádět nebudu, zabral by asi tak jednu celou stranu. A co teprve vzorec pro polynomy stupně 5? 6? 50? 10 000? Kolik zaberou stran? Odpověď je, že žádnou. Je dokázáno, že obecný vzorec pro polynom stupně 5 a více neexistuje, nikdy tedy ani existovat nebude. Zkrátka tyto kořeny obecně počítat neumíme. Ze základní věty algebry víme, že existují, ale dokonce pro tato čísla ani nemáme žádné značení, nedokážeme je zapsat pomocí odmocnin, sčítání, násobení, ..., prostě nám zůstanou navždy utajeny.

4 Reciproký polynom

V rychlosti se podíváme na speciální tvar polynomu, zvaný reciproký polynom.

Definice: Polynom stupně n ve tvaru $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ nazveme reciproký, jestliže $a_i = a_{n-i}$.

Zkrátka jeho koeficienty čtené od konce jsou stejné jako koeficienty od začátku.

Věta 3: Má-li reciproký polynom f nenulový kořen α, pak číslo $\frac{1}{\alpha}$ je také kořenem f.

Důkaz: Víme, že platí $a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\alpha^n$. Dosaďme nyní do f hodnotu $\frac{1}{\alpha}$ a poté celou rovnici vynásobme α^n.

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{\alpha}) &= a_0 + a_1\frac{1}{\alpha} + a_2\frac{1}{\alpha^2} + ... + a_n\frac{1}{\alpha^n} \\ \alpha^n f(\frac{1}{\alpha}) &= a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_n \\ \alpha^n f(\frac{1}{\alpha}) &= f(\alpha) = 0 \\ f(\frac{1}{\alpha}) &= 0, \end{aligned}$$

tedy $\frac{1}{\alpha}$ je kořen.

Platí i obecnější tvrzení. Pokud je α n-násobný kořen, pak i $\frac{1}{\alpha}$ je. To už zde dokazovat nebudeme.

Definice: Polynom stupně n ve tvaru $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ nazveme záporně reciproký, jestliže $a_i = -a_{n-i}$.

Jako cvičení si můžete dokázat, že obě tvrzení uvedená pro reciproký polynom platí i pro záporně reciproký polynom. Nebo je jen můžete brát jako fakt. Také stojí za zmínku, že záporně reciproký polynom sudého stupně $2n$ má koeficient u x^n roven 0. Dle definice totiž dostaneme $a_n = -a_n$, což po úpravě znamená $2a_n = 0$ a pokud $2 \neq 0$, můžeme rovnost vydělit a dostáváme $a_n = 0$.

5 Závěr

Polynomy jsou cool, užitečné a dá se s nimi dělat spousta věcí. Tento text je jen krátký stručný úvod do teorie polynomů, jinak se nad polynomy dají trávit stovky hodin času. Můžete například definovat polynomy více proměnných a zkoumat je, bude to však ještě mnohokrát složitější. O tom třeba někdy příště.